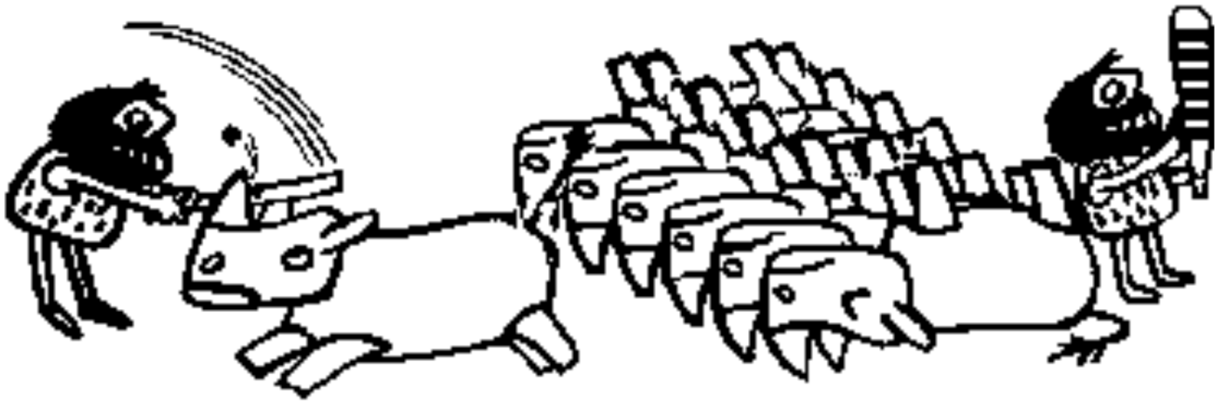
CAPÍTULO 6



ECUACIONES DIFERENCIALES:

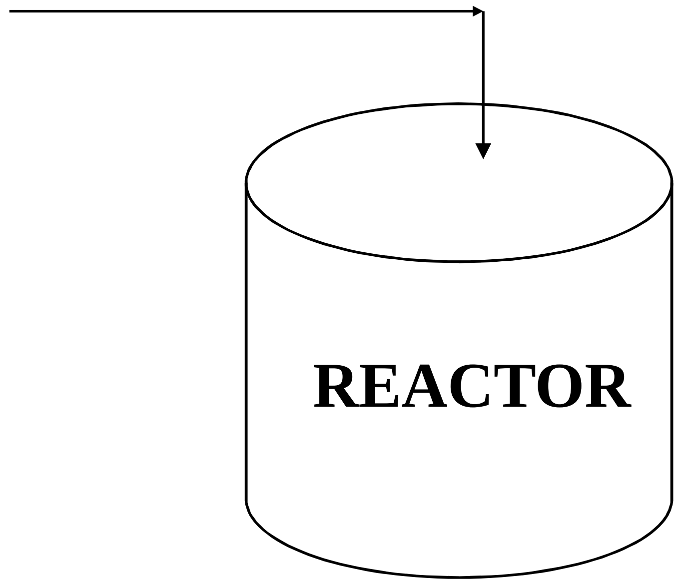
EL PROBLEMA DEL VALOR INICIAL

El objetivo de este capítulo es introducir al estudiante a dominar los principales métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, incluyendo los métodos de un solo paso y los métodos multipasos. Al final de este capítulo el estudiante podrá aplicar diferentes técnicas y tendrá la capacidad para decidir, a través del error cometido y del tiempo involucrado, cuál es la mejor.

EJEMPLO ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER ORDEN

A $\rightarrow$ B+C

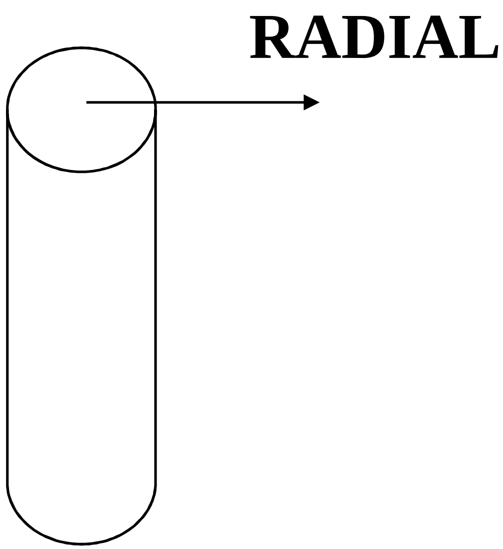
$$\begin{cases} \dfrac{dC_A}{dt} = -kC_A V \\ \dfrac{dC_B}{dt} = kC_A V \\ \dfrac{dC_C}{dt} = k(C_A)V \end{cases}$$



EJEMPLO ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN:

Flujo de Calor Estacionario y Unidimensional (sin generación de calor) en Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$



ECUACIONES DIFERENCIALES

- **PROBLEMAS DE VALOR INICAL (PVI)**
- **PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA (PVF)**
- **PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA (MIXTO: PVIF)**

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

CLASIFICACION

PASOS
- UN SOLO PASO
- MULTIPASOS

INFORMACION QUE USA
- EXPLICITA
- IMPLICITA

EDO DE ORDEN DOS O SUPERIOR

- Se reducirán mediante cambios de variables adecuados a sistemas de EDO's de primer orden.
- En la lámina siguiente hay un ejemplo de reducción del orden de una EDO.

EJEMPLO

$$y'''(t) + y(t) = 0$$

Condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

Proponiendo los siguientes cambios de variables:

$$y(t) = u_1(t)$$

$$y'(t) = u_1'(t) = u_2(t)$$

$$y''(t) = u'_2(t) = u_3(t)$$

$$y'''(t) = u'_3(t)$$

EDO-PVI

$$\begin{cases} u'_1(t) = u_2(t) \\ u'_2(t) = u_3(t) \\ u'_3(t) = -u_1(t) \end{cases}$$

CONDICION INICIAL

$$\begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \\ u_3(0) = -2 \end{cases}$$

METODOS DE TAYLOR

Los métodos de Taylor se basan en calcular el valor de la variable dependiente utilizando un desarrollo en serie de Taylor para calcular un punto ubicado en el futuro y cuyas dependencias se expresan en función del valor en el presente y de sus derivadas.

$$y(t+h) = \boxed{y(t) + \frac{h}{1!} y'(t)} + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \ldots + \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(\xi)$$

Métodos de primer orden

MÉTODO DE EULER
TAYLOR PRIMER ORDEN

En la práctica, el método de Euler raramente se aplica, sin embargo, la simplicidad del método permite iniciar su estudio antes de aplicar la metodología a los demás métodos de mayor uso.

- Formulación hacia adelante (tradicional)
- Formulación hacia atras
- Formulación modificada

METODOS DE EULER HACIA ADELANTE

$$y'(t, y(t)) = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

$$y(a) = \alpha$$

$$y(t + h) = y(t) + \frac{h}{1!} y'(t, y(t)) + \Theta(h^2)$$

ERROR LOCAL DE SEGUNDO ORDEN
ERROR GLOBAL DE PRIMER ORDEN

EJEMPLO

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$dy/dx=f(x,y)=-2x^3+12x^2-20x+8,5$$

$$y(0)=1$$

La solución analítica es:

$$y=-0,5x^4+4x^3-10x^2+8,5x+1$$

EJEMPLO: Euler adelante

Usando el algoritmo:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

y h=0,5

$$y(0) = 1$$

$$y(0,5) = 1 + 0,5\left(-2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8,5\right)$$

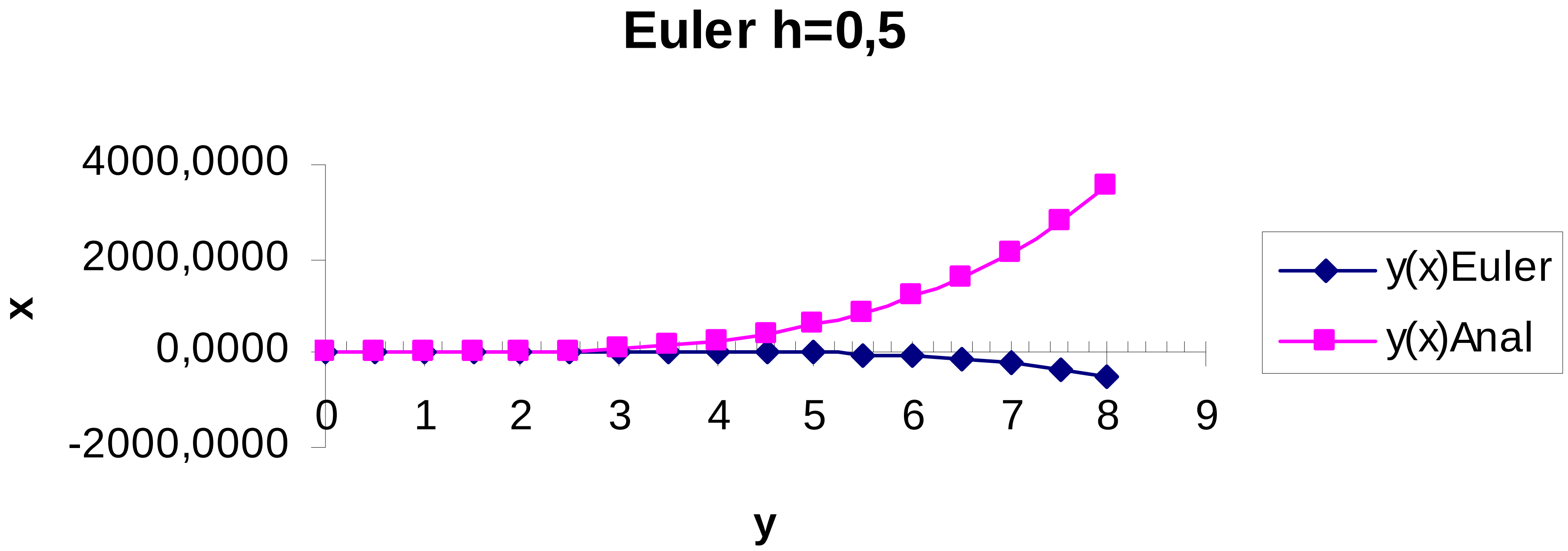
$$y(0,5) = 5,25$$

$$y(0,5)_{analítica} = 3,28125$$

h=0,5

iteración	x	y(x)Euler	y(x)Anal
0	0	1,0000	1,0000
1	0,5	5,2500	3,2813
2	1	5,8750	4,0000
3	1,5	5,1250	7,2813
4	2	4,5000	18,0000
5	2,5	4,7500	41,7813
6	3	5,8750	85,0000
7	3,5	7,1250	154,7813
8	4	7,0000	259,0000
9	4,5	3,2500	406,2813
10	5	-7,1250	606,0000
11	5,5	-27,8750	868,2813
12	6	-63,5000	1204,0000
13	6,5	-119,2500	1624,7813
14	7	-201,1250	2143,0000
15	7,5	-315,8750	2771,7813
16	8	-471,0000	3525,0000

EJEMPLO

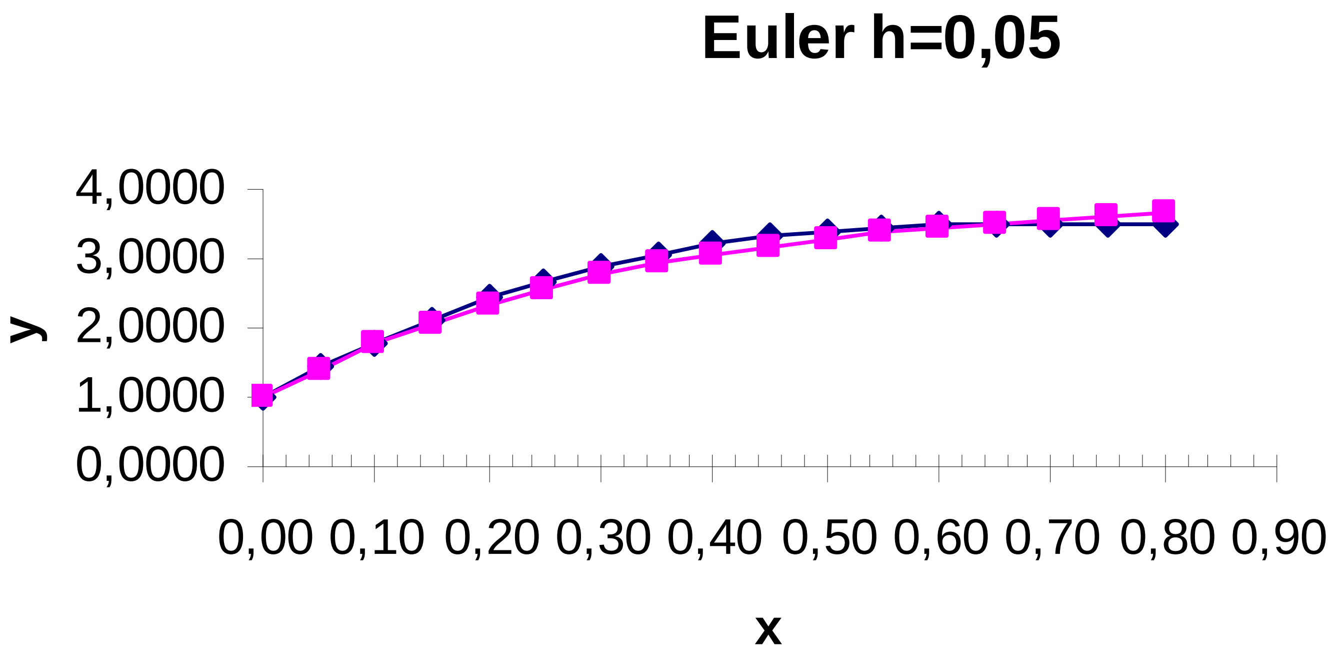

Euler h=0,5
4000,0000
2000,0000
0,0000
-2000,0000
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
y
y(x)Euler
y(x)Anal

h=0,1

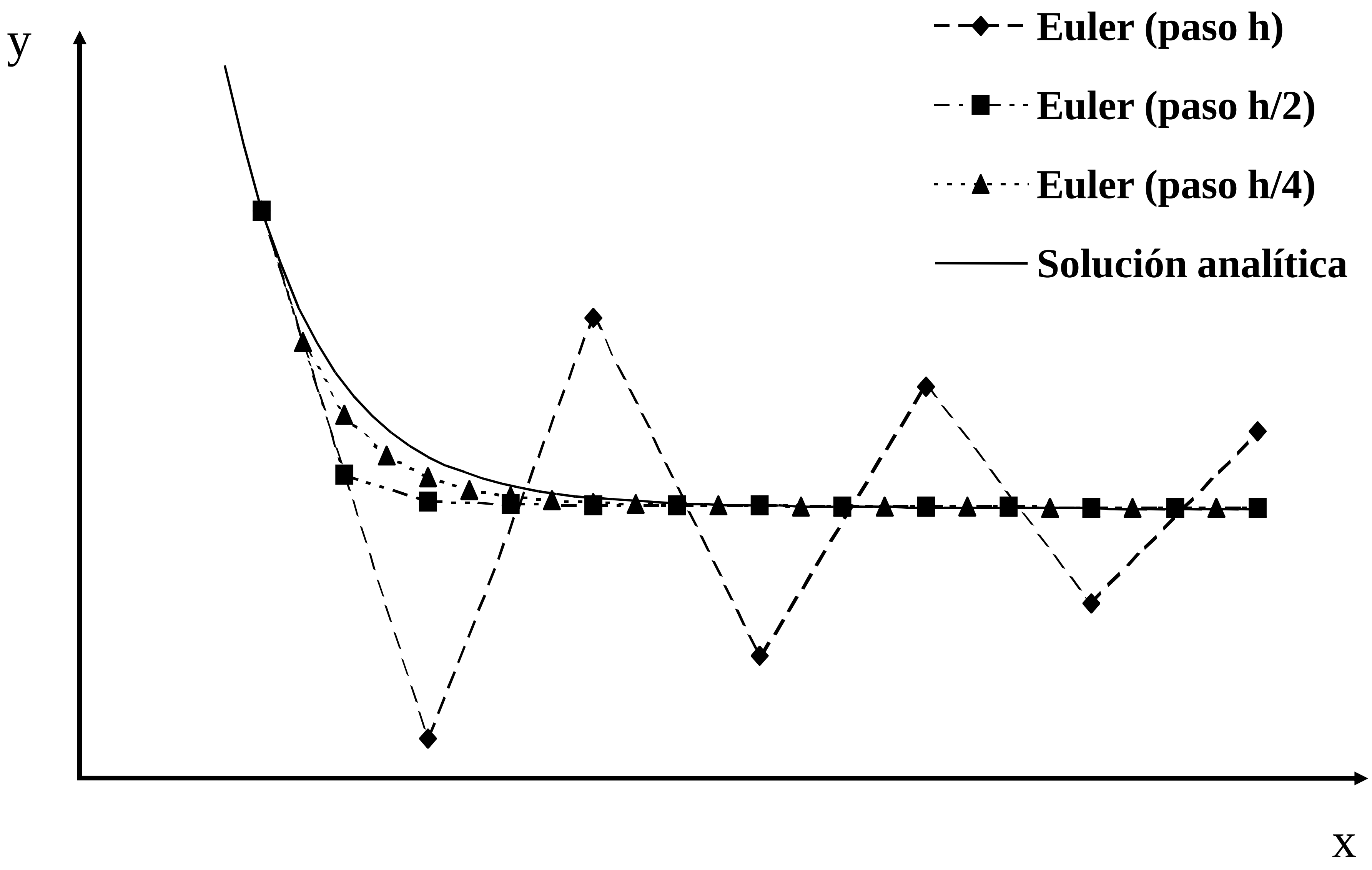
x	y(x)Euler	y(x)Anal
0,0	1,0000	1,0000
0,1	1,8500	1,7541
0,2	2,5118	2,3328
0,3	3,0082	2,7621
0,4	3,3608	3,0688
0,5	3,5900	3,2813
0,6	3,7150	3,4288
0,7	3,7538	3,5421
0,8	3,7232	3,6528
0,9	3,6388	3,7941
1,0	3,5150	4,0000
1,1	3,3650	4,3061
1,2	3,2008	4,7488
1,3	3,0332	5,3661
1,4	2,8718	6,1968
1,5	2,7250	7,2813
1,6	2,6000	8,6608

h=0,05

x	y(x)Euler	y(x)Anal
0,00	1,0000	1,0000
0,05	1,4250	1,4005
0,10	1,8015	1,7541
0,15	2,1324	2,0638
0,20	2,4206	2,3328
0,25	2,6688	2,5645
0,30	2,8797	2,7621
0,35	3,0560	2,9290
0,40	3,2002	3,0688
0,45	3,3148	3,1850
0,50	3,4022	3,2813
0,55	3,4647	3,3613
0,60	3,5046	3,4288
0,65	3,5240	3,4878
0,70	3,5250	3,5421
0,75	3,5097	3,5957
0,80	3,4800	3,6528


Euler h=0,05
4,0000
3,0000
2,0000
1,0000
0,0000
y
0,00
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
x

Influencia del paso



METODOS DE EULER HACIA ATRAS

Sustituyendo h por -h:

$$y(t-h) = y(t) - \frac{h}{1!} f(t, y(t)) + \Theta(h^2)$$

Llamando a t'=t-h:

$$y(t') = y(t'+h) - \frac{h}{1!} f(t'+h, y(t'+h)) + \Theta(h^2)$$

$$y(t'+h) = y(t') + \frac{h}{1!} f(t'+h, y(t'+h)) + \Theta(h^2)$$

ERROR LOCAL DE SEGUNDO ORDEN

ERROR GLOBAL DE PRIMER ORDEN

METODO IMPLICITO

METODOS DE
EULER MODIFICADO

Adelante: $$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

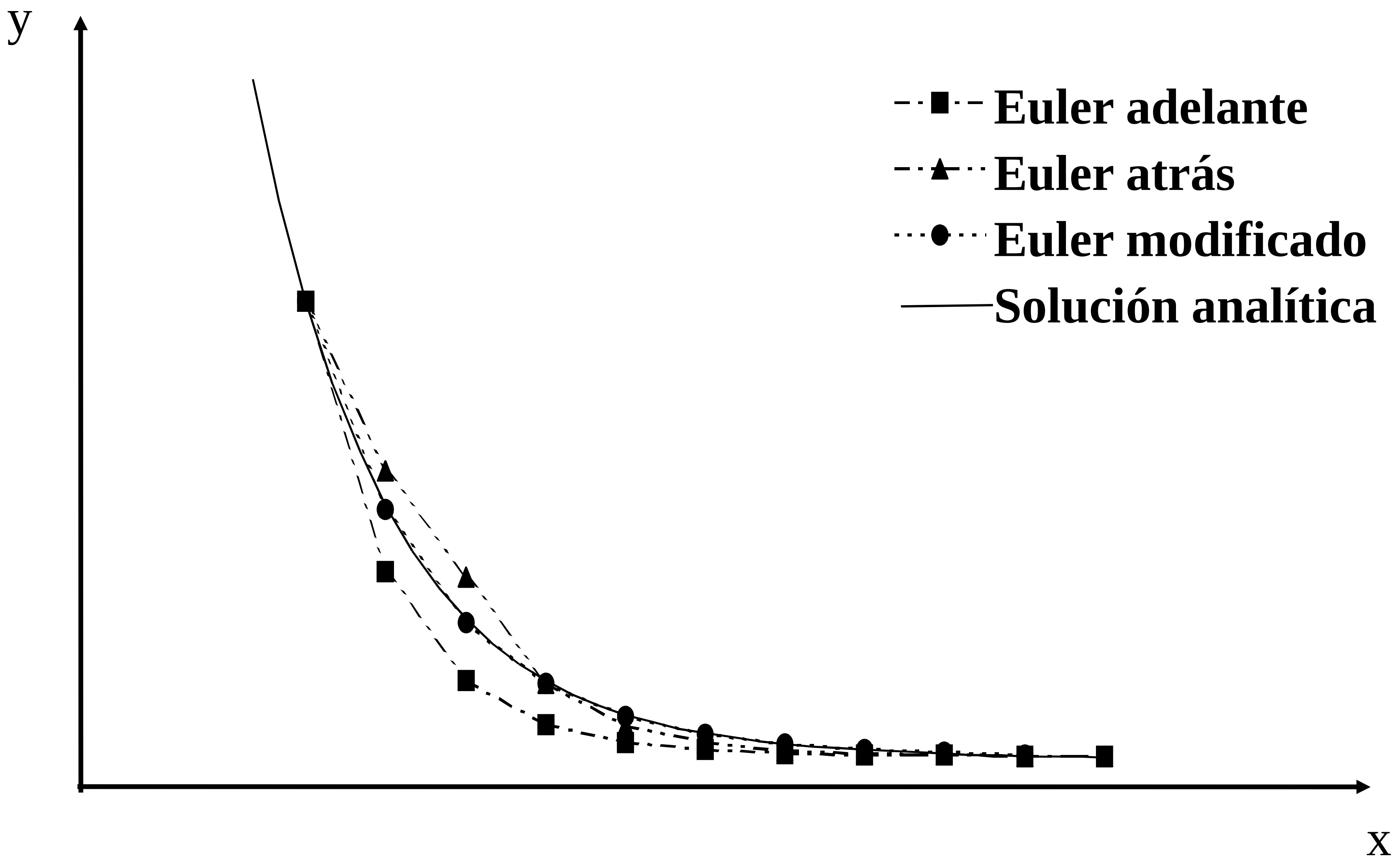
Atrás: $$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Promediando:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]$$

ERROR LOCAL DE TERCER ORDEN
ERROR GLOBAL DE SEGUNDO ORDEN
METODO SEMI-IMPLICITO

Comparación entre los distintos métodos de Euler



METODOS TAYLOR DE ORDEN MAYOR QUE UNO

$$y(t_{i+1}) \approx \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} y^{(j)}(t_i)$$

$$\mathrm{df}(\mathrm{t},\mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}\mathrm{dy}$$

EJEMPLO

$$y' = 2t(1 + y^2) \qquad\qquad 0 < t < 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y''(t_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_i)$$

$$y' = f(t, y(t)) = 2t(1 + y^2)$$

$$y'' = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 2(1 + y^2) + 4tyy' = 2(1 + 4t^2 y)(1 + y^2)$$

$$y''' = f''(t, y(t)) = 8t(1 + y^2)[3y + 2t^2(1 + 3y^2)]$$

FINALMENTE

$$y_{i+1} = y_i + 2ht_i(1 + y_i^2) + h^2(1 + 4t_i^2 y_i)(1 + y_i^2)$$
$$+ 4h^3 t_i (1 + y_i^2)[3y_i + 2t_i^2(1 + 3y_i^2)]/3$$

METODOS DE RUNGE-KUTTA

Matemáticos Alemanes $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{\textit{Carl Runge}} \\ \textbf{\textit{Whilhelm Kutta}} \end{array} \right.$

OBJETIVO

Utilizar un método similar al de Taylor pero evitando el cálculo directo de las derivadas, manteniendo el mismo orden de magnitud del error local.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{q} b_j K_j$$

Promedio

$$\sum_{j=1}^{q} b_j = 1$$

$$\mathrm{K}_\mathrm{j} = h\mathrm{f}(t_n + \mathrm{c}_j h, \mathrm{y}_n + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{q}} \mathrm{a}_{\mathrm{jk}} \mathrm{K}_\mathrm{k})$$

RUNGE-KUTTA SEGUNDO ORDEN

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y''(t_i) + \Theta(h^3)$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y(t_i)) + \Theta(h^3)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y(t_i)) \right) + \Theta(h^3)$$

RUNGE-KUTTA SEGUNDO ORDEN

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{q} b_j K_j \qquad \mathrm{K_j} = hf(t_n + \mathrm{c}_j h, \mathrm{y}_n + \sum_{k=1}^{q} \mathrm{a_{jk}} \mathrm{K_k})$$

$$\mathrm{y}(t_{i+1}) = \mathrm{y}(t_i) + \mathrm{b_1 K_1} + \mathrm{b_2 K_2}$$

$$\mathrm{y}(t_{i+1}) = \mathrm{y}(t_i) + \mathrm{hb_1 f}(t_i, \mathrm{y}(t_i)) + \mathrm{hb_2 f}(t_i + \mathrm{c_2 h}, \mathrm{y}(t_i) + \mathrm{a_{21} K_1})$$

Taylor primer orden:

$$f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) =$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

RUNGE-KUTTA SEGUNDO ORDEN

Desarrollando por Taylor:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hb_1 f(t_i, y(t_i)) +$$
$$hb_2\left(f\left(t_i, y(t_i)\right) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + a_{21} hf\left(t_i, y(t_i)\right) \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Reagrupando:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) +$$
$$h(b_1 + b_2) f(t_i, y(t_i)) + h^2 b_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial t} + h^2 b_2 a_{21} f(t_i, y(t_i)) \frac{\partial f}{\partial y}$$

RUNGE-KUTTA
SEGUNDO ORDEN

Comparando término a término con la siguiente ecuación:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y(t_i)) + \Theta(h^3)$$

$$b_1 + b_2 = 1 \qquad b_2 c_2 = \frac{1}{2} \qquad b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

b_1, b_2, c_2 y a_{21} son incógnitas.

RUNGE-KUTTA SEGUNDO ORDEN

De este conjunto de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, es necesario fijar uno de los parámetros para obtener las demás constantes (con la salvedad de que b_2 no puede ser igual a cero, ya que esto corresponde a un método de primer orden). Los valores típicos que se suelen tomar son $b_1=0$ ó $b_2=1/2$.

RUNGE-KUTTA
SEGUNDO ORDEN

Si $b_1 = 0$:

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{h\, f\left(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \right)}_{\text{Fórmula del punto medio}}$$

Si $b_2 = 1/2$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f\left(t_i, y(t_i)\right) + \underbrace{\frac{h}{2} f\left(t_i + h, y(t_i) + hf(t_i, y_i)\right)}_{\text{Fórmula del trapecio}}$$

EJEMPLO:RK-2

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$dy/dx=f(x,y)=-2x^3+12x^2-20x+8{,}5$$

$$y(0)=1$$

La solución analítica es:

$$y=-0{,}5x^4+4x^3-10x^2+8{,}5x+1$$

EJEMPLO: RK-2

Usando el algoritmo:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right)$$

$$\mathrm{y}(0) = 1$$

$$K_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + K_2\right)$$

EJEMPLO: RK-2

h=0,05

$$y(0)=1$$

$$\mathrm{K}_1 = 0{,}05\left(-2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8{,}5\right)$$

$$K_1 = 0{,}425$$

$$\mathrm{K}_2 = 0{,}05\left(-2(0{,}05)^3 + 12(0{,}05)^2 - 20(0{,}05) + 8{,}5\right)$$

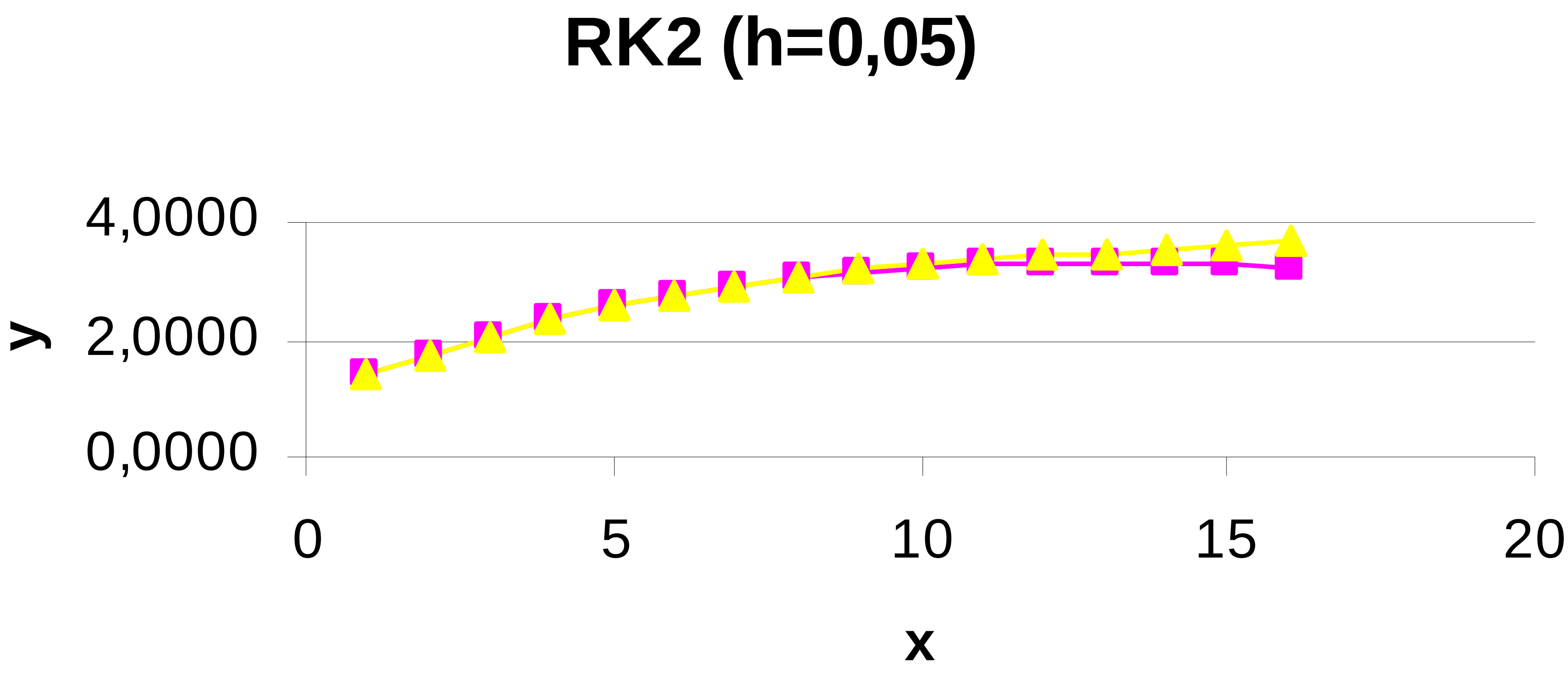
$$\mathrm{K}_2 = 0{,}3764$$

$$y(0{,}5) = 1 + \frac{1}{2}\left(0{,}425 + 0{,}3764\right) = 1{,}4007$$

$$y(0{,}5)_{analítica} = 1{,}4005$$

h=0,05

x	K1	K2	y(x)RK-2	Y(x)Anal
0,00			1	1,0000
0,05	0,4250	0,3765	1,4007	1,4005
0,10	0,3765	0,3309	1,7544	1,7541
0,15	0,3309	0,2882	2,0640	2,0638
0,20	0,2882	0,2482	2,3322	2,3328
0,25	0,2482	0,2109	2,5617	2,5645
0,30	0,2109	0,1763	2,7553	2,7621
0,35	0,1763	0,1442	2,9156	2,9290
0,40	0,1442	0,1146	3,0450	3,0688
0,45	0,1146	0,0874	3,1460	3,1850
0,50	0,0874	0,0625	3,2209	3,2813
0,55	0,0625	0,0399	3,2721	3,3613
0,60	0,0399	0,0194	3,3018	3,4288
0,65	0,0194	0,0010	3,3120	3,4878
0,70	0,0010	-0,0153	3,3048	3,5421
0,75	-0,0153	-0,0297	3,2823	3,5957
0,80	-0,0297	-0,0422	3,2464	3,6528


RK2 (h=0,05)
4,0000
2,0000
0,0000
y
0
5
10
15
20
x

MÉTODO RUNGE-KUTTA CUARTO ORDEN

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}{6}$$

$$K_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(t_n + h/2, y_n + K_1/2)$$

$$K_3 = hf(t_n + h/2, y_n + K_2/2)$$

$$K_4 = hf(t_n + h, y_n + K_3)$$

Método de Runge-Kutta de cualquier orden

Existe otro planteamiento más general y sistemático para derivar las fórmulas de Runge-Kutta, aunque no sea tan intuitivo como la derivación anterior. Este enfoque se basa en las fórmulas de cuadraturas para integrales. En efecto, sean c_1, c_2, ..., c_q números reales positivos o nulos, distintos o no. Se considerarán las siguientes fórmulas de integración por el método de cuadratura:

$$\int_0^{c_n} f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{q} a_{nj} f(c_j)$$

Método de Runge-Kutta de cualquier orden

$$y_{i+1} = y_i + \int_{\mathrm{t_i}}^{\mathrm{t_{i+1}}} \mathrm{f}(t, y(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{y_i} + h\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{q}} \mathrm{b_j}\,\mathrm{f}(\mathrm{t_{i,j}}, \mathrm{y_{i,j}})$$

donde,

$$t_{\mathrm{i}} = ih, \qquad t_{\mathrm{i,n}} = t_{\mathrm{i}} + c_n \mathrm{h}$$

$$y_{i,n} = y_i + \int_{\mathrm{t_i}}^{\mathrm{t_{i,n}}} \mathrm{f}(t, y(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{y_i} + h\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{q}} \mathrm{a_{nj}}\,\mathrm{f}(\mathrm{t_{i,j}}, \mathrm{y_{i,j}})$$

Matriz de Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
c_{n-1} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & . & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
c_n & a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{n,n-1} & a_{nn} \\
\hline
1 & b_1 & b_{n2} & . & . & b_{n-1} & b_n
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c|c}
\mathbf{c} & \mathbf{A} \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{b}^{\mathbf{T}}
\end{array}
$$

Método Teta

Variante 1

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1-\theta & \theta \end{array}$$

Variante 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2\theta & 1/2\theta & 0 \\ \hline 1 & 1-\theta & \theta \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\theta = 0$
Euler adelante

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$\theta = 1$
Euler atrás

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$\theta = 1/2$
Euler modificado

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$\theta = 1$
Punto medio (RK2)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$\theta = 1/2$
Heun

Método Teta

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

θ=0

Euler adelante:

$$y_{n+1} = y_n + h[f(t_n, y_n)]$$

θ=1

Euler atrás:

$$y_{n+1} = y_n + h[f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

θ=1/2

Euler modificado:

$$y_{n+1} = y_n + h[\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Tradicional (Simpson 1/3)

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
1	1/6	1/3	1/3	1/6

Tradicional (Simpson 3/8)

0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0
2/3	1/3	1/3	0	0
1	1	-1	1	0
1	1/8	3/8	3/8	1/8

Modificación de Gill

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	$(\sqrt{2}-1)/2$	$(2-\sqrt{2})/2$	0	0
1	0	$(-\sqrt{2})/2$	$(2+\sqrt{2})/2$	0
1	1/6	$(2-\sqrt{2})/2$	1/3	$(2+\sqrt{2})/2$

Método de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden

0	0	0	0	0	0	0
1/4	1/4	0	0	0	0	0
3/8	3/32	9/32	0	0	0	0
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197	0	0	0
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104	0	0
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	0
1	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0
	1/360	0	-128/4275	-2197/75240	1/50	2/55

ERROR

La última línea de la matriz de Butcher permite calcular el error local mediante la fórmula:

$$E_i = y_i - y^*_i = e_1K_1 + e_2K_2 + e_3K_3 + e_4K_4 + e_5K_5 + e_6K_6$$

Método de Runge-Kutta-Verner de quinto orden

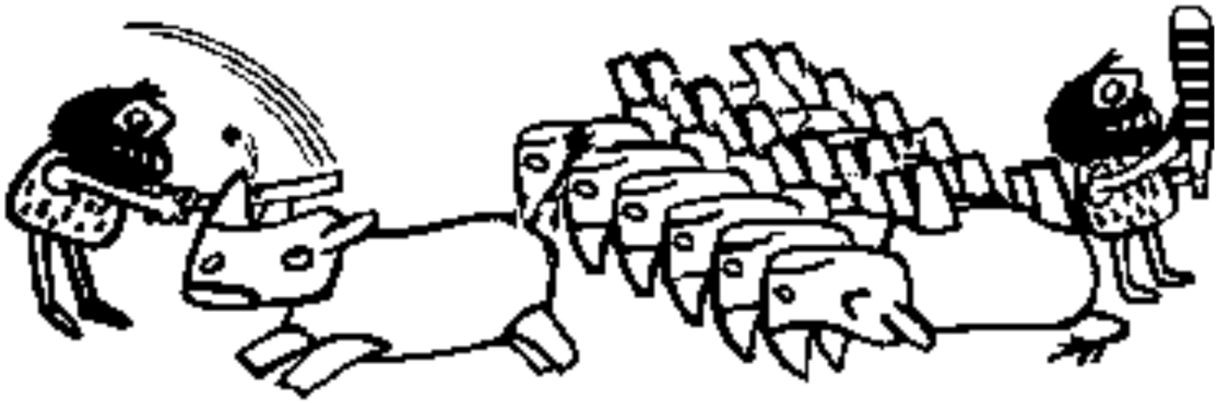
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/18	1/18	0	0	0	0	0	0	0
1/6	-1/12	1/4	0	0	0	0	0	0
2/9	-2/81	4/27	8/81	0	0	0	0	0
2/3	40/33	-4/11	-56/11	54/11	0	0	0	0
1	-369/73	72/73	5380/219	-12285/584	2695/1752	0	0	0
8/9	-8716/891	656/297	39520/891	-416/11	52/27	0	0	0
1	3/80	0	4/25	243/1120	77/160	73/700	0	0
	33/640	0	-132/325	891/2240	-33/320	-73/700	891/8329	2/35

PARCIAL II

- FECHA: Lunes 20 de Marzo del 2000.
- HORA: 2:30-5:30 p.m.
- LUGAR: Laboratorio de Fenómenos de Transporte. 1er. Piso.
- MATERIA: Capítulos 4, 5 y 6

  (hasta Pág. 269)
- Recordar traer hojas blancas y calculadora.

CAPÍTULO 6



ECUACIONES DIFERENCIALES:

EL PROBLEMA DEL VALOR INICIAL:

Métodos Multipasos: Predictor-Corrector

MÉTODOS MULTIPASOS

- Los métodos de Euler y de RK son llamados de paso simple porque sólo usan información del último paso.
- El principio detrás de los métodos multipasos es utilizar valores pasados de la función o de su derivada para construir un polinomio que aproxime la función derivada, para luego integrarla.

MÉTODOS MULTIPASOS

$$\int_{t_i}^{t_j} \mathrm{y}'(t, y(t))\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{f}(t, y(t))\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{p_n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{y(t_j) - y(t_i)} = \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{P_n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{y(t_j) = y(t_i)} + \int_{t_i}^{t_j} \mathrm{P_n}(t, y(t))\mathrm{d}t$$

MÉTODOS MULTIPASOS

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{P}_{\mathrm{n}}(t)\mathrm{d}t$$

Usando Newton-Gregory hacia atrás:

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_0^1 \left(\mathrm{f}_{\mathrm{n}} + \mathrm{s}\Delta\mathrm{f}_{\mathrm{n\text{-}1}} + \frac{(s+1)s}{2}\Delta^2 f_{n-2} + error \right) hds$$

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \int_0^1 \left(\mathrm{f}_{\mathrm{n}} + \mathrm{s}\Delta\mathrm{f}_{\mathrm{n\text{-}1}} + \frac{(s+1)s}{2}\Delta^2 f_{n-2} \right) hds + \int_0^1 \frac{s(s-1)(s-2)}{6} h^3 f'''(\xi) hds$$

METODOS DE MULTIPASOS

$$P_1(t) = y_i + (t - t_i)\frac{f(t_{i+1}, y_{i+1}) - f(t_i, y_i)}{h}$$

$$y^*_{i+1} = y_i + h\frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_i)}{2}$$

METODO DE MILNE

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} P_3(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}
P_3(t) = {} & \frac{t - t_{i-3}}{t_i - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-2}}{t_i - t_{i-2}} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f(t_i, y_i) \\
& + \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-1} - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-1} - t_{i-2}} \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} f(t_{i-1}, y_{i-1}) \\
& + \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-2} - t_{i-3}} \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-2} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i-2} - t_i} f(t_{i-2}, y_{i-2}) \\
& + \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-3} - t_{i-2}} \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-3} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i-3} - t_i} f(t_{i-3}, y_{i-3})
\end{aligned}$$

METODO DE MILNE

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, y_{i-2})]$$

ERROR

$$E_{i+1} = \frac{14}{45} h^5 y^{(5)}(\xi_i), \qquad t_i < \xi_i < t_{i+1}$$

METODO DE MILNE

$$y_{i+1} = y_{i\text{-}n} + \int_{t_{i-n}}^{t_{i+1}} P_n(t)dt = y_{i\text{-}n} + \sum_{j=0}^{n} b_{jn} f(t_{i-j}, y_{i-j})$$

Tabla 6-1: Coeficientes para la fórmula predictiva del método de Milne

n	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	b_{5n}	Denominador
0	1						1
1	2	0					1
2	27	0	9				12
3	8	-4	8	0			3
4	425	-350	600	-50	95		288
5	132	-168	312	-168	132	0	40

METODO DE MILNE-CORRECTOR

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} P_2(t)\,dt$$

$$P_2(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i-+1}} f(t_i, y_i)$$

$$+ \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} \frac{t - t_{i+1}}{t_{i-1} - t_{i+1}} f(t_{i-1}, y_{i-1})$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(t_i, y_i) + f(t_{i-1}, y_{i-1})]$$

$$E_{i+1} = -\frac{1}{90} h^5 y^{(5)}(\mu_n) \qquad t_i < \mu_i < t_{i+1}$$

METODO DE MILNE-CORRECTOR

Tabla 6-1: Coeficientes para la fórmula correctiva del método de Milne

N	b_{-1n}	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	b_{5n}	Denominador
0	1	1						2
1	1	4	1					6
2	3	9	9	3				24
3	7	32	12	32	7			90
4	19	75	50	50	75	19		288
5	41	216	27	272	27	216	41	840

Métodos de Adams-Bashforth-Moulton

Fórmula predictora ⇒ **Adams-Bashforth**

Fórmula correctora ⇒ **Adams-Moulton**

Observación:

Este método presenta excelente precisión y estabilidad a bajo orden del Pn(x).

Métodos de Adams-Bashforth
Fórmula predictora

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_n(t)dt = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=i}^{i-n} P_n(t) f(t_j, y_j)dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t)dt \right) f(t_j, y_j) = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} b_{j,n} f(t_j, y_j)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{i-3}) + \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right)$$

Métodos de Adams-Moulton
Fórmula correctora

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t)\,dt \right) f(t_j, y_j) = y_i + \sum_{j=i}^{i-n} b_{j,n} f(t_j, y_j)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(f_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta f_i - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{i-2}) - \frac{19}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right)$$

Métodos de Adams-Moulton-Bashforth
Fórmula para interpolar

$$y_{i-1/2} = \frac{1}{128}\left(35y_i + 140y_{i-1} - 70y_{i-2} + 28f_{i-3} - 5f_{i-4}\right)$$

$$y_{i-3/2} = \frac{1}{64}\left(-y_i + 24y_{i-1} + 54y_{i-2} - 16f_{i-3} + 3f_{i-4}\right)$$

Métodos de Adams-Bashforth
Fórmula predictora

Coeficientes para el método de Adams-Bashforth

n	b_{0n}	B_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	Denominador	$\Sigma\| b_{in} \|$
0	1					1	1
1	3	-1				2	2
2	23	-16	5			12	3,66…
3	55	-59	37	-9		24	6,66…
4	1901	-2774	2616	-1274	251	720	12,24…

Métodos de Adams-Moulton
Fórmula correctora

Coeficientes para el método de Adams-Moulton

n	b_{-1n}	b_{0n}	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	Denominador	$\Sigma\| b_{in} \|$
0	1	1					2	1
1	5	8	-1				12	1,16…
2	9	19	-5	1			24	1,41…
3	251	646	-264	106	-19		720	1,78…
4	2375	7135	-3990	2410	-865	135	7200	2,34…

Ejemplo de RK-2 para sistema de ecuaciones

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\left(K_{11} + K_{12}\right)$$

Usar h = 0,1

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(K_{21} + K_{22}\right)$$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

Donde,

$$K_{11} = hf_1\left(x_0, y_0\right)$$

$$K_{21} = hf_2\left(x_0, y_0\right)$$

$$K_{12} = hf_1\left(x_0 + K_{11}, y_0 + K_{21}\right)$$

$$K_{22} = hf_2\left(x_0 + K_{11}, y_0 + K_{21}\right)$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si se tiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si:

a) $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son continuas en $[a,b]$.
b) $g(x) > 0$ en el intervalo $[a,b]$.

Entonces:

El problema tiene una única solución.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Es posible convertir el problema anterior en un PVI. De esta manera se podría utilizar uno de los métodos para resolver PVI dados en clase.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

PVI-1:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = 0$$

PVI-2:

$$y'' = f(x)y' + g(x)y + h(x), \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = 0, \qquad y'(a) = 1$$

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO

Si y1(x) es la solución del PVI-1 y y2(x) es la solución del PVI-2, entonces:

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_1(x) + y_2(x)\frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}, \quad y_2(b) \neq 0$$

Es la única solución del PVF original.

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
METODO DEL DISPARO